**Teorema :**

Determinan matriks A yang berukuran n x n dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri dalam suatu baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menambahkan hasil-hasil kali yang dihasilkan yakni untuk setiap 1 \leq i \leq n dan 1 \leq j \leq n, maka

det(A) = a1jC1j + a2jC2j + … + anjCnj

(ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-j)

atau

det(A) = ai1Ci1 + ai2Ci2 + … + ainCin

(ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-i)

Untuk lebih memperjelas apa itu **kofaktor**, perhatikan **Definisi** dibawah ini.

**Definisi :**

Jika A adalah matriks kuadrat, maka **minor entri aij** dinyatakan oleh Mij dan didefinisikan menjadi determinan submatriks yang tetap setelah baris ke-i dan kolom ke-j dicoret dari A. Bilangan (-1)i+jMijdinyatakan oleh Cij dan dinamakan **kofaktor entri aij.**

**Contoh 1 :**

Misalkan kita punya matriks A = \left [ \begin{array}{rrr} 3& 1& -4\\ 2& 5& 6\\ 1& 4& 8 \end{array} \right ]. Tentukan minor entri a11, a12, dan a13. Tentukan juga kofaktor entri M11, M12 dan M13 !

**Penyelesaian :**

**minor entri a11** adalah M11 = \left | \begin{array}{rrr} 3& 1& -4\\ 2& 5& 6\\ 1& 4& 8 \end{array} \right | = \left | \begin{array}{rr} 5& 6\\ 4& 8 \end{array} \right | = 5(8) – 4(6) = 16

**kofaktor a11** adalah C11 = (-1)1+1M11 = (-1)2(16) = 16

**minor entri a12** adalah M12 = \left | \begin{array}{rrr} 3& 1& -4\\ 2& 5& 6\\ 1& 4& 8 \end{array} \right | = \left | \begin{array}{rr} 2& 6\\ 1& 8 \end{array} \right | = 2(8) – 1(6) = 10

**kofaktor a12** adalah C12 = (-1)1+2M12 = (-1)3(10) = -10

**minor entri a13** adalah M13 = \left | \begin{array}{rrr} 3& 1& -4\\ 2& 5& 6\\ 1& 4& 8 \end{array} \right | = \left | \begin{array}{rr} 2& 5\\ 1& 4 \end{array} \right | = 2(4) – 1(5) = 3

**kofaktor a13** adalah C13 = (-1)1+3M13 = (-1)4(3) = 3

**Contoh 2 :**

Dari **Contoh 1** diatas, tentukan determinan matriks A

**Penyelesaian :**

Menggunakan yang diberikan pada **Teorema** diatas dengan mengambil i = 1 dan j = 1, 2, dan 3, maka diperoleh.

det(A) = a11C11 + a12C12 + a13C13

= 3(16) + 1(-10) + (-4)(3)

= 48 – 10 – 3

= 35

**Contoh 3 :**

Tentukan determinan matriks A = \left [ \begin{array}{rrr} 0& 6& 0\\ 8& 6& 8\\ 3& 2& 2 \end{array} \right ]

**Penyelesaian :**

Menggunakan yang diberikan pada **Teorema** diatas dengan mengambil i = 3 dan j = 1, 2, dan 3, maka diperoleh.

det(A) = \left | \begin{array}{rrr} 0& 6& 0\\ 8& 6& 8\\ 3& 2& 2 \end{array} \right |

= a31C31 + a32C32 + a33C33

= a31(-1)3+1M31 + a32(-1)3+2M31 + a33(-1)3+3M31

= a31M31 – a32M31 + a33M31

= 3\left | \begin{array}{rr} 6& 0\\ 6& 8 \end{array} \right | – 2\left | \begin{array}{rr} 0& 0\\ 8& 8 \end{array} \right | + 2\left | \begin{array}{rr} 0& 6\\ 8& 6 \end{array} \right |

= 3[6(8)-0(6)] – 2[0(8)-8(0)] + 2[0(6)-8(6)]

= 144 – 0 – 96

= 48

atau jika ingin lebih cepat, kita bisa melihat entri yang mengandung nol agar lebih mempersingkat waktu mengerjakan. Karena dalam baris pertama terdapat dua entri nol, maka i = 1 dan j = 1, 2, 3 kemudian gunakan rumus.

det(A) = a11C11 + a12C12 + a13C13

= a11(-1)1+1M11 + a12(-1)1+2M12 + a13(-1)1+3M13

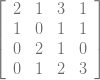
= a11M11 – a12M12 + a13M13

= 0\left | \begin{array}{rr} 6& 8\\ 2& 2 \end{array} \right | – 6\left | \begin{array}{rr} 8& 8\\ 3& 2 \end{array} \right | + 0\left | \begin{array}{rr} 8& 6\\ 3& 2 \end{array} \right |

= 0 – 6[8(2)-8(3)] + 0

= 48

**Contoh 4 :**

Tentukan determinan matriks B = 

**Penyelesaian :**

dengan menggunakan kolom pertama pada matriks B sebagai kofaktor dan berdasarkan **Teorema** diatas dengan mengambil i = 1, 2, 3, 4 dan j = 1 maka diperoleh.

det(B) = 

= a11C11 + a21C21 + a31C31 – a41C41

= a11(-1)1+1M11 + a21(-1)2+1M21 + a31(-1)3+1M31 + a41(-1)4+1M41

= a11M11 – a21M21 + a31M31 + a41M41

= 2\left | \begin{array}{rrr} 0& 1& 1\\ 2& 1& 0\\ 1& 2& 3 \end{array} \right | – 1\left | \begin{array}{rrr} 1& 3& 1\\ 2& 1& 0\\ 1& 2& 3 \end{array} \right | + 0\left | \begin{array}{rrr} 1& 3& 1\\ 0& 1& 1\\ 1& 2& 3 \end{array} \right | – 0\left | \begin{array}{rrr} 1& 3& 1\\ 0& 1& 1\\ 2& 1& 0 \end{array} \right |

hitung lagi determinan untuk matriks 3×3 nya

= 2[ambil i = 1 dan j = 1, 2, 3] – 1[ambil i = 1, 2, 3 dan j = 3] {untuk matriks ketiga dan keempat tidak perlu dihitung karena koefesiennya 0, sehingga apabila dikali, hasilnya akan tetap = 0}

= 2[a11C11 + a12C12 + a13C13] – 1[a13C13 + a23C23 + a33C33] + 0 – 0

= 2[a11(-1)1+1M11 + a12(-1)1+2M12 + a13(-1)1+3M13] –  1[a13(-1)1+3M13 + a23(-1)2+3M23 + a33(-1)3+3M33]

= 2[a11M11 – a12M12 + a13M13] – 1[a13M13 + a23M23 + a33M33]

= 2(0\left | \begin{array}{rr} 1& 0\\ 2& 3 \end{array} \right | – 1\left | \begin{array}{rr} 2& 0\\ 1& 3 \end{array} \right | + 1\left | \begin{array}{rr} 2& 1\\ 1& 2 \end{array} \right |) – 1(1\left | \begin{array}{rr} 2& 1\\ 1& 2 \end{array} \right | – 0\left | \begin{array}{rr} 1& 3\\ 1& 2 \end{array} \right | + 3\left | \begin{array}{rr} 1& 3\\ 2& 1 \end{array} \right |)

= 2(0[1(3)-2(0)] – 1[2(3)-1(0)] + 1[2(2)-1(1)]) – 1(1[2(2)-1(1)] – 0[1(2)-1(3)] + 3[1(1)-2(3)])

= 2(0 – 6 + 3) – 1(3 – 0 + 3(-5))

= -6 + 12

= 6