BARISAN TAK HINGGA DAN DERET TAK HINGGA

BARISAN TAK HINGGA
Rofiq mencari rumah temannya di jalan Soragan no. 15. Setelah sampai di jalan Gambir, ia memperhatikan nomor-nomor rumah yang ada di sebelah kanan jalan adalah rumah dengan nomor genap 2, 4, 6, 8, dan seterusnya. Kearah mana yang harus dituju Iwan untuk menemukan rumah temannya? ke urutan ke berapa letak rumah itu?
Nomor-nomor di atas adalah adalah contoh bilangan aritmatika. barisan ini mempunyai selisih tetap antara dua bilangan yang saling berurutan.
Misalnya bila banyaknya rumah ada 20, rumah yang bernomor ganjil ada disebelah kiri sedangkan rumah yang bernomor genap ada di sebelah kanan jalan, maka bila di urutkan nomor rumah yang ada di sebelah jalan adalah 2, 4, 6, 8,…….,20, membentuk suatu barisan. Barisan ini dikatakan sebagai barisan berhingga karena terdapat bilangan terakhir. Bila himpunan bilangan-bilangan membentuk suatu barisan Yang tidak mempunyai bilangan terakhir maka barisan tersebut dikatakan sebagai barisan tak hingga. misalnya 1, 3, 5, 7,…… dikatakan tak hingga karena titik-titik yang tidak diikuti bilangan menunjukkan bahwa tidak ada bilangan terakhir.
Suatu barisan a1, a2, a3,……., Dapat disajikan pula sebagai atau lebih disingkat .
Suatu bilangan dapat dispesifikasikan dengan memberikan suku awal yang cukup untuk membentuk suatu pola, seperti pada barisan 1, 4, 7, 10, 13,…….. dengan rumus eksplisit untuk suku ke-n seperti
an = 3n – 2 , n
Atau oleh rumus rekursi,
an-1 + 3, n , a1 = 1
Ketiga barisan diatas melukiskan barisan yang sama.
Perhatikan rumusan eksplisit berbagai barisan dan beberapa suku pertamanya.
1.
2.
3.
4. 0,999, 0,999, 0,999, 0,999,………
Dari empat barisan di atas, nilai-nilai dari tiap barisan mendekati satu. tapi yang merupakan barisan konvergen mendekati satu adalah an dan bn, sedangkan yang lainnya tidak.
Syarat agar barisan konvergen mendekati satu adalah
a. Nilai-nilai barisan harus mendekati 1
b. Nilai-nilai tersebut harus berdekatan.
Syarat tersebut tidak dipenuhi oleh cn dan dn.
Tapi pada kasus dn tidak konvergen menuju 1, yang betul bahwa barisan dn konvergen menuju 0,999 sedangkan barisan cn tidak konvergen sama sekali. barisan ini dinamakan barisan divergen.
Jadi dapat pula dikatakan bila barisan mempunyai limit maka berisan itu konvergen dan an kovergen ke limit tersebut. bila barisan itu tidak konvergen, maka barisan itu divergen.

Contoh:
Perhatikan apakah barisan konvergen atau divergen?
Penyelesaian:
Kita akan menunjukkan apakah ,
Ambil f(x) = , dan periksa

Jadi , oleh karena itu barisan konvergen dan konvergen ke 2.

Contoh:
Buktikan bahwa
Penyelesaian:
Untuk kita peroleh , oleh karena dan terbukti limit yang harus dicari berdasar teorema apit.

Bukti: Oleh karena , dengan menggunakan teorema apit terbukti rumus di atas.
Contoh:
Apabila -1 < r < 1, buktikan bahwa
Penyelesaian:
Limit itu jelas untuk r = 0. Andaikan Selanjutnya r , maka |r| < 1, sehingga Jadi dapat ditulis , untuk semua p > 0.Menurut teorema binomial, , sehingga , oleh karena maka berdasarkan teorema apit kita peroleh atau - ekuivalen - maka menurut teorema C kita peroleh
Bagaimana kalau r > 1; misalnya r = 1,5? maka rn akan melampaui tiap bilangan yang diketahui apabila n menjadi bilangan besar. kita tulis r > 1. Kita katakana barisan {rn} divergen. agar konvergen, barisan harus menuju suatu limit yang terhingga. barisan {rn} juga divergen apabila .

BARISAN MONOTON.
Barisan {an} disebut:
Naik jika a1 < a2 < a3 < …….< an < …….., atau an < an+1 untuk semua n.
Tidak turun jika a1 a2 a3 ……. an ……., atau an an+1 untuk semua n.
Turun jika a1 > a2 > a3 > …….> an > …….., atau an > an+1 untuk semua n.
Tidak naik jika a1 a2 a3 ……. an …….., atau an an+1 untuk semua n.
Barisan disebut monoton jika tidak turun atau juga tidak naik sedangkan barisan yang naik atau turun disebut barisan monoton sempurna.
Contoh:
adalah naik.
adalah turun
1, 1, 2, 2, 3, 3,…………. adalah tidak turun
1, adalah tidak naik.

Contoh:
Buktikan bahwa barisan {bn} dengan konvergen dengan menggunakan teorema D.
Penyelesaian:
Beberapa suku permulaan barisan ini adalah , tampak untuk , bahwa barisan itu menurun yaitu (bn > bn+1). Bukti ini dapat dilihat dibawah ini. Tiap pertidaksamaan setara dengan pertidaksamaan yang lain.

Pertidaksamaan terakhir benar untuk n > 3. Oleh karena barisan menurun (persyaratan lebih berat dari pada tak naik) dan terbatas oleh nol di bawah, maka menurut teorema barisan yang monoton, barisan itu mempunyai limit.

DERET TAK HINGGA
Bentuk deret tak hingga bisa dinyatakan dalam notasi sigma. ak disebut sebagai suku deret.
Jumlah Deret
Misalkan Sn menyatakan jumlah parsial n suku pertama deret , maka
S1 = a1
S2 = a1 + a2
:
:
:
Sn = a1 + a2 +………+an =
Barisan disebut barisan jumlah parsial deret
Misalkan merupakan barisan jumlah parsial deret dan barisan konvergen ke S. maka deret dikatakan deret konvergen ke S dan S disebut jumlah dari deret , dinotasikan dengan S = . Sedangkan bila barisan divergen maka deret dikatakan deret divergen dan tidak ada jumlah**.

DERET GEOMETRI**
Suatu deret yang berbentuk dengan dan r merupakan rasio dinamakan deret geometri.
Jumlah parsial suku ke-n, Sn, dinyatakan oleh
Sn = a + ar + ar2 + ……….+ arn-1
rSn = ar + ar2 + ……….+ arn-1 + arn
Sn – rSn = a - arn
(1-r) Sn = a(1-rn)

Semuanya sekarang tergantung pada rasio r. jika |r| < 1, maka , dan karenanya . jika |r| > 1, maka , dank arena itu . perkecualian sepele terjadi bila a = 0. Dalam kasus ini , semua suk adalah 0, deret adalah konvergen dan jumlahnya adalah 0. hasil tersebut dapat diringkas sebagai berikut.

Contoh:
Misalkan deret geometri , dengan rasio r = ½ dan suku pertama a = 1:
1 + ½ + ¼ + ……..
Detet tersebut konvergen dan mempunyai jumlah jadi

Bukti:
Andaikan Sn jumlah parsial deret ke-n dan S = oleh karena an = Sn – Sn-1, maka
Contoh:
Buktikan bahwa divergen!
Penyelesaian:
, menurut teorema A, deret divergen.

DERET HARMONIS
bentuk deret harmonis: , Pandang jumlah parsial n suku pertama deret

, untuk maka (1 + ½ + ½ +……..+1/n) →∞ sehingga .
Oleh karena itu deret harmonis divergen.
Sifat-Sifat Deret Konvergen. Deret yang konvergen berperilaku sama seperti jumlah terhingga.

Bukti. Teorema ini memberikan gambaran yang sedikit berbeda. lambing dalam teorema diatas digunakan baik untuk deret tak terhingga maupun untuk jumlah deret itu sendiri, yang berupa bilangan.
Diketahui dan keduanya ada. Dengan menggunakan sifat penjumlahan dengan suku-suku terhingga dan sifat limit kita peroleh.
(i) = =
= c =
(ii) = = [ + ]
= + = +

Bukti. Andaikan deret yang konvergen dan asalkan {Sn} barisan jumlah parsial deret tersebut. Apabila deret yang diperoleh dari pengelompokan suku-suku deret dan andaikan {Tm} barisan jumlah-jumlah parsialnya, maka tiap Tm adalah salah satu Sn. Misalnya,
T4 = a1 + (a2 + a3) + ( a4 + a5 + a6) + (a7 + a8)
Dalam hal ini T4 = S8. Jadi {Tm} adalah “bagian barisan” {Sn}. sehingga apabila Sn →S, maka Tm →S.

KUIS
1. Tunjukkan bahwa merupakan barisan naik.
2. Periksalah untuk konvergensi.
3. Tunjukkan bahwa desimal tak terhingga 0,999…………sama dengan 1.
4. Sebuah bola di jatuhkan dari ketinggian 100 kaki. Tiap kali bola tersebut mengenai tanah, ia dipantulkan setinggi 2/3 dari tinggi sebelumnya. Tentukan jarak seluruhnya yang ditempuh bola tersebut?
5. Jumlah tak hingga suku-suku deret geometri adalah 6. sedang jumlah suku-suku bernomor genap adalah 2. maka rasio deret tersebut adalah?

PENYELESAIAN
1. an = , maka an+1 =
Jadi, untuk n ≥ 1
an - an+1 = -
=
=
Jadi, an < an+1
Untuk n ≥1. ini menunjukkan bahwa barisan tersebut adalah naik.
2. Deret di atas merupakan deret geometri dengan rasio r = -1/2 dan suku pertama a = 1. karena |r| = ½ < 1, deret ini konvergen dan jumlahnya adalah
3. 0,999…..= , ini adalah geometri dengan suku pertama a = 9/10 dan rasio r = 1/10. Maka deret ini konvergen ke jumlah
4. Bola jatuh:
Sn =
Bola naik:
Sn =
Jadi jarak seluruh yang ditempuh bola adalah panjang lintasan bola jatuh ditambah panjang lintasan bola naik, yaitu 300 kaki + 200 kaki = 500 kaki
5. S∞ =
6 =
a = 6 – 6r
Suku-suku bernomor genap:

ar = 2 – 2r2
(6 – 6r)r = 2 – 2r2
6r – 6r2 = 2 – 2r2
4r2 – 6r + 2 = 0
2r2 – 3r + 1 = 0
(2r – 1) (r – 1) = 0
r = ½ V r = 1 (tidak mungkin)
jadi rasio r nya adalah ½.